Elektrotechnik (Teil 3/3)

Luft- und Raumfahrttechnik Bachelor, 1. Semester

David Straub

Gliederung des Kurses

1. Einführung (Physikalische Größen, Einheiten)
2. Das elektrische Feld (Ladungen, Kräfte, Felder, Potential, Spannung, Kapazität, Kondensatoren)
3. Gleichstrom (Stromstärke, Widerstand, Stromkreisberechnungen, Energie, Leistung)
4. Magnetismus (Feld in Vakuum und Materie, Kräfte, magnetischer Kreis)
5. Elektromagnetische Induktion (Induktion, Selbstinduktion, Energie)
6. Wechselstrom (Komplexe Wechselstromrechnung, Schaltungen, Leistung)
7. Drehstrom (Dreiphasensystem)
8. Schaltvorgänge an Kapazitäten und Induktivitäten

Wechselstrom

- Grundlegende Begriffe und Definitionen
- Komplexe Wechselstromrechnung
- Wechselstromwiderstände
- Grundschaltungen linearer Wechselstromwiderstände
- Leistung im Wechselstromkreis (Blindleistung, Wirkleistung, Scheinleistung)

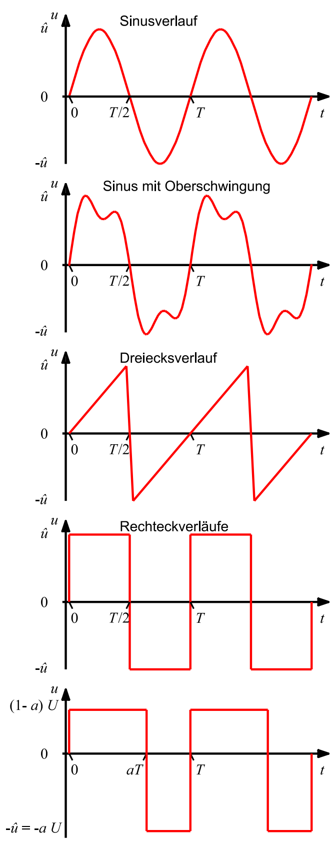
Wechselstrom: Grundlagen

Periodische Größen:

- Sich zeitlich wiederholende physikalische Größen
- Periodendauer $T \rightarrow u(t) = u(t + T)$
- Frequenz: $f = \frac{1}{T}$, Kreisfrequenz: $\omega = 2\pi f$

Wechselgrößen:

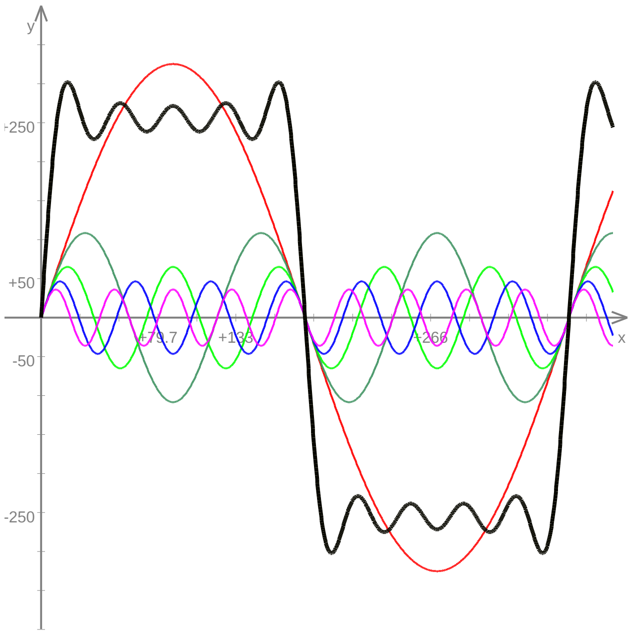
Periodische elektrische Größen mit verschwindendem arithmetischem Mittelwert



Wechselgrößen: Eigenschaften

Fourier-Analyse: Jede Wechselgröße kann als Überlagerung von Sinusvorgängen dargestellt werden

$$a(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{A}_n \cdot \sin(n \cdot \omega t + \varphi_n)$$



Arithmetischer Mittelwert

Definition:

$$\overline{a} = \frac{1}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} a(t)\, dt$$

Für sinusförmige Wechselgrößen:

$$a(t) = \hat{A} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_a)$$

Gilt:

$$\overline{a} = 0$$

Der arithmetische Mittelwert einer sinusförmigen Wechselgröße ist immer null.

Gleichrichtwert

Definition:

$$\overline{|a|} = \frac{1}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} |a(t)| \, dt$$

Für sinusförmige Wechselgrößen:

$$\overline{|a|} = \frac{2}{\pi} \cdot \hat{A} \approx 0{,}637 \cdot \hat{A}$$

Der Gleichrichtwert entspricht dem Mittelwert des Betrags der Wechselgröße.

Effektivwert: Definition

Physikalischer Hintergrund:

- Derjenige Wert einer Wechselgröße, der in seiner Wirkung bei Energieumformung einem Gleichstrom entspricht

Beispiel:

$$W_{\mathrm{el}} = I^2 \cdot R \cdot T \stackrel{!}{=} \int_0^T i^2(t) \cdot R \, dt$$

$$\Rightarrow I \equiv I_{\mathrm{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T i^2(t) \, dt}$$

Allgemeine Definition:

$$A_{\mathrm{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} a^2(t) \, dt}$$

Effektivwert für Sinusschwingungen

Für sinusförmige Wechselgrößen:

$$a(t) = \hat{A} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_a)$$

Herleitung:

$$A_{\mathrm{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T \hat{A}^2 \cdot \sin^2(\omega \cdot t) \, dt}$$

Ergebnis:

$$A_{\text{eff}} = \frac{\hat{A}}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707 \cdot \hat{A}$$

Effektivwert: Beispiele

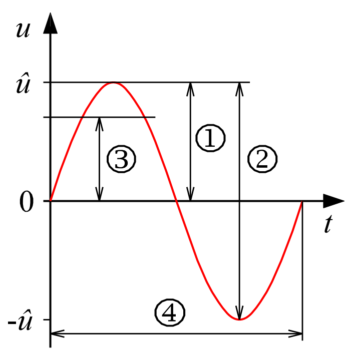
Netzspannung:

- $U_{\text{eff}} = 230$ V
- $\hat{U} = \sqrt{2} \cdot U_{\text{eff}} = 325$ V

Haushaltssicherung:

- $I_{\text{eff}} = 16$ A
- $\hat{I} = \sqrt{2} \cdot I_{\text{eff}} = 22{,}6$ A

Der Effektivwert wird von Messgeräten angezeigt!



Zusammenfassung: Kennwerte von Wechselgrößen

Kennwert	Definition	Formel	Für Sinusfunktion
Arithmetischer Mittelwert	Zeitlicher Mittelwert über eine Periode	$\overline{a} = \frac{1}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} a(t)\,dt$	$\overline{a} = 0$
Gleichrichtwert	Mittelwert des Betrags	$\overline{\|a\|} = \frac{1}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} \|a(t)\|\,dt$	$\overline{\|a\|} = \frac{2}{\pi} \cdot \hat{A} \approx 0{,}637 \cdot \hat{A}$
Effektivwert	Quadratischer Mittelwert	$A_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} a^2(t)\,dt}$	$A_{\text{eff}} = \frac{\hat{A}}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707 \cdot \hat{A}$

Notationskonvention

In diesem Kapitel werden die zeitabhängigen Wechselgrößen mit Kleinbuchstaben bezeichnet:

- $u(t)$: Spannung
- $i(t)$: Strom

Großbuchstaben stehen für die zugehörigen Amplituden:

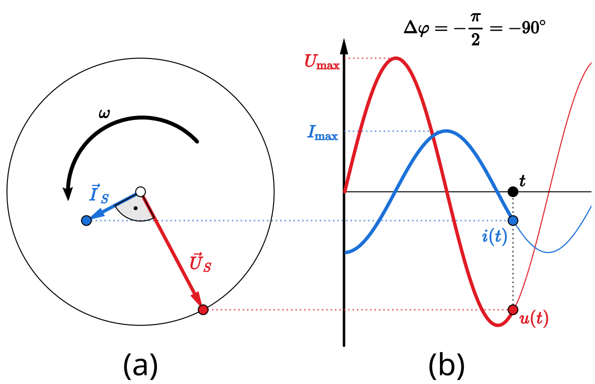
- $\hat{U}$: Spannungsamplitude
- $\hat{I}$: Stromamplitude

Zeigerdarstellung

Sinusförmige Wechselgrößen können als rotierende Zeiger in der komplexen Ebene dargestellt werden.

Zeigereigenschaften:

- Winkelgeschwindigkeit: $\omega = 2\pi f$
- Länge: $\hat{U} = U_{\text{max}}$ (Amplitude)
- zum Zeitpunkt $t = 0$: φ_u



Komplexe Darstellung

Um Berechnungen zu vereinfachen, können Wechselgrößen als komplexe Größen dargestellt werden. Anstatt mit trigonometischen Funktionen zu rechnen, kann dann die Exponentialfunktion verwendet werden.

Zeitabhängige komplexe Spannung:

$$\underline{u}(t) = \hat{U} \cdot e^{j(\omega t+\varphi_u)} = \hat{U} \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{j\varphi_u} = \underbrace{\underbrace{\hat{U}\, e^{j\varphi_u}}_{\text{Festzeiger } \underline{U}} \; e^{j\omega t}}_{\text{Drehzeiger}} = \underline{U}\; e^{j\omega t}$$

Reale Zeitfunktion:

$$u(t) = \mathrm{Re}\,\underline{u}(t) = \hat{U} \cdot \cos(\omega t + \varphi_u)$$

Komplexe Zahlen: Grundlagen

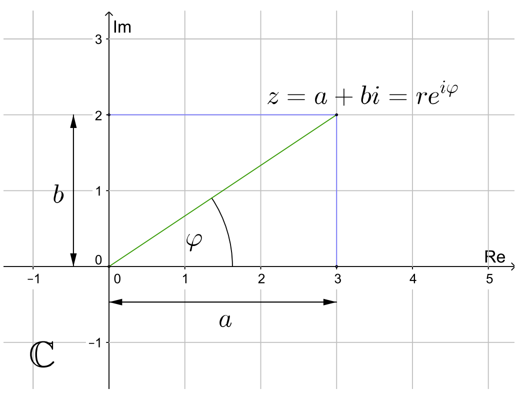
Imaginäre Einheit (in der Elektrotechnik zur Unterscheidung von Strom $i(t)$ als j notiert):

$$j = \sqrt{-1}, \quad j^2 = -1$$

Komplexe Zahl:

$$\underline{z} = a + jb$$

mit Realteil $a = \mathrm{Re}\,\underline{z}$ und Imaginärteil $b = \mathrm{Im}\,\underline{z}$



Euler'sche Formel

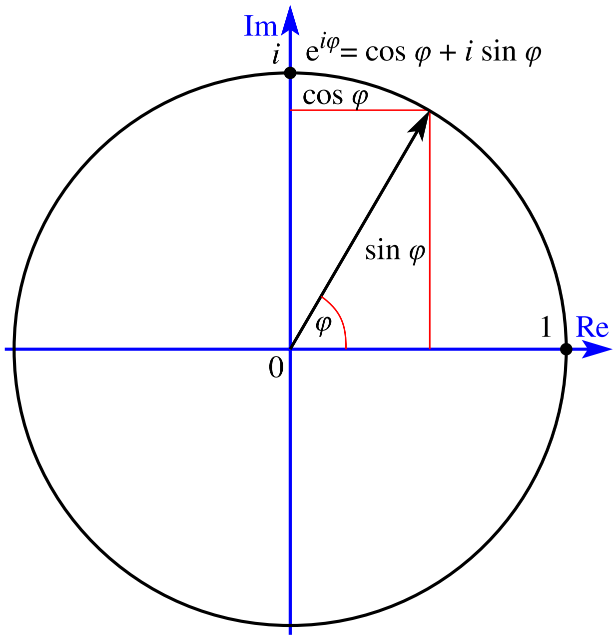
Euler'scher Satz:

$$e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j\sin(\varphi)$$

Wichtige Spezialfälle:

- $e^{j0} = 1$
- $e^{j\pi/2} = j$

- $e^{j\pi} = -1$
- $e^{j3\pi/2} = -j$
- $e^{j2\pi} = 1$



Darstellungsformen

Komponentenform (kartesisch):

$$\underline{Z} = R + jX$$

Polarform (Exponentialform):

$$\underline{Z} = |\underline{Z}| \cdot e^{j\varphi} = Z \cdot e^{j\varphi}$$

Umrechnung:

- Betrag: $Z = |\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + X^2}$
- Phase: $\varphi = \arctan\left(\frac{X}{R}\right)$
- Realteil: $R = Z \cdot \cos(\varphi)$
- Imaginärteil: $X = Z \cdot \sin(\varphi)$

Konjugiert komplexe Zahl

Konjugiert komplexe Zahl $\underline{Z}^*$:

$$\underline{Z} = R + jX \quad \Rightarrow \quad \underline{Z}^* = R - jX$$

$$\underline{Z} = Z \cdot e^{j\varphi} \quad \Rightarrow \quad \underline{Z}^* = Z \cdot e^{-j\varphi}$$

Eigenschaften:

- $\underline{Z} \cdot \underline{Z}^* = |\underline{Z}|^2 = Z^2$
- $\operatorname{Re} \underline{Z} = \dfrac{\underline{Z} + \underline{Z}^*}{2}$

Addition und Subtraktion

In Komponentenform:

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 \pm \underline{Z}_2 = (R_1 \pm R_2) + j(X_1 \pm X_2)$$

In Polarform: Umrechnung in Komponentenform notwendig

$$\underline{Z} = Z_1 \cdot e^{j\varphi_1} \pm Z_2 \cdot e^{j\varphi_2} = (Z_1 \cos\varphi_1 \pm Z_2 \cos\varphi_2) + j(Z_1 \sin\varphi_1 \pm Z_2 \sin\varphi_2)$$

Addition und Subtraktion erfolgen am einfachsten in Komponentenform!

Multiplikation

In Polarform:

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 = Z_1 \cdot e^{j\varphi_1} \cdot Z_2 \cdot e^{j\varphi_2} = Z_1 \cdot Z_2 \cdot e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

Beträge multiplizieren, Phasen addieren!

In Komponentenform:

$$\underline{Z} = (R_1 + jX_1) \cdot (R_2 + jX_2)$$

$$= (R_1 R_2 - X_1 X_2) + j(R_1 X_2 + R_2 X_1)$$

Division

In Polarform:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = \frac{Z_1 \cdot e^{j\varphi_1}}{Z_2 \cdot e^{j\varphi_2}} = \frac{Z_1}{Z_2} \cdot e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

Beträge dividieren, Phasen subtrahieren!

In Komponentenform: Erweitern mit konjugiert komplexem Nenner

$$\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = \frac{R_1 + jX_1}{R_2 + jX_2} \cdot \frac{R_2 - jX_2}{R_2 - jX_2} = \frac{(R_1R_2 + X_1X_2) + j(R_2X_1 - R_1X_2)}{R_2^2 + X_2^2}$$

? Gruppenarbeit: Spannung × Strom

Gegeben:

- Spannung: $u(t) = 325\,\mathrm{V} \cdot \cos(\omega t)$
- Strom: $i(t) = 10\,\mathrm{A} \cdot \sin(\omega t)$

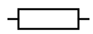
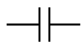
Aufgaben: 1. Zeichnen Sie beide Größen als **Zeiger** im Zeigerdiagramm 2. Stellen Sie $\underline{U}$ und $\underline{I}$ in **kartesischer Form** $(a + jb)$ dar 3. Wandeln Sie beide um in **Polarform** $(Z \cdot e^{j\varphi})$ 4. Berechnen Sie das Produkt $\underline{U} \cdot \underline{I}^*$ in **beiden Darstellungen** 5. Vergleichen Sie die Ergebnisse und diskutieren Sie: Was fällt auf?

Hinweis: $\sin(\omega t) = \cos(\omega t - 90°)$

Wechselstromwiderstände

Grundelemente im Wechselstromkreis

Die drei Grundelemente im Wechselstromkreis sind:

- Ohmscher Widerstand R 
- Kapazität C 
- Induktivität L

Ohmscher Widerstand

Grundgleichung:

$$u = R \cdot i$$

Spannungs- und Stromverlauf:

$$u = \hat{U} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_u)$$

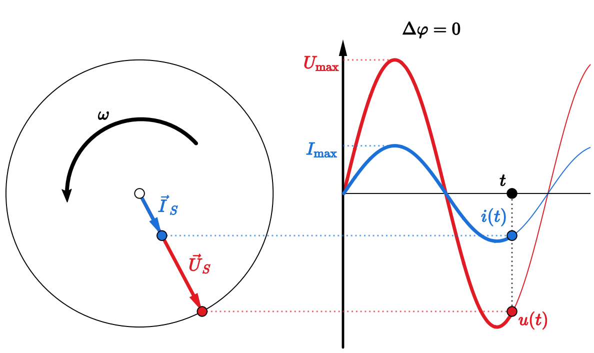
$$i = \hat{I} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_i)$$

Mit $u = R \cdot i$ folgt:

$$\hat{U} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_u) = R \cdot \hat{I} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_i)$$

$$\Rightarrow \hat{U} = R \cdot \hat{I}\,, \qquad \varphi_u = \varphi_i$$

Bei ohmschen Widerständen sind Strom und Spannung in Phase.

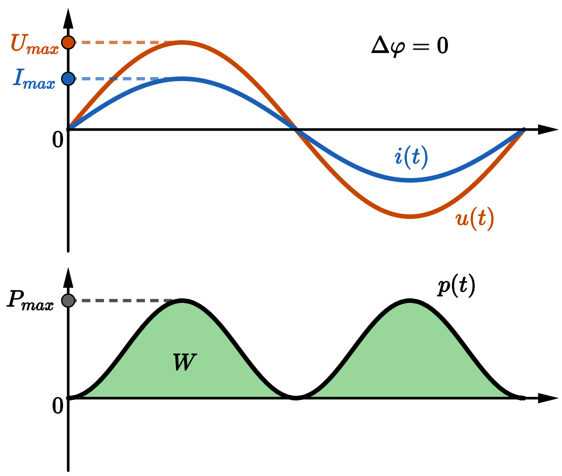


(a) (b)

Leistung am ohmschen Widerstand

Momentanleistung (für $\varphi_u = \varphi_i = 0$):

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = \hat{U} \cdot \sin(\omega t) \cdot \hat{I} \cdot \sin(\omega t)$$
$$= \hat{U} \cdot \hat{I} \cdot \sin^2(\omega t) = \hat{U} \cdot \hat{I} \cdot \frac{1}{2} \cdot (1 - \cos(2\omega t)) \geq 0$$

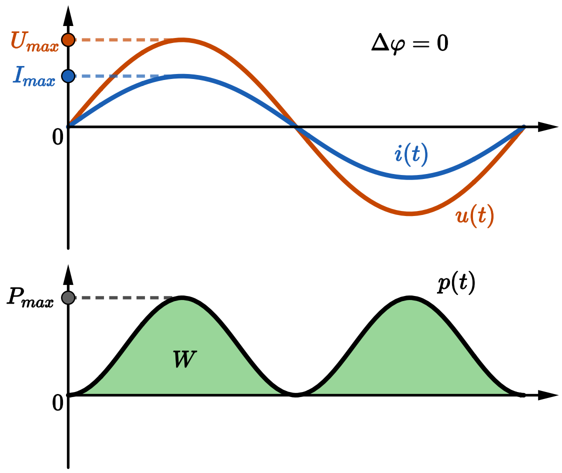


Mittlere Leistung am ohmschen Widerstand

Berechnung:

$$\overline{p} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T p(t)\, dt$$
$$= \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{2} \cdot \hat{U} \cdot \hat{I} \cdot \int_0^T (1 - \cos(2\omega t))\, dt$$
$$= \frac{\hat{U} \cdot \hat{I}}{2 \cdot T} \cdot \left[t - \frac{1}{2 \cdot \omega} \cdot \sin(2\omega t) \right]_0^T$$
$$= \frac{\hat{U} \cdot \hat{I}}{2} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\hat{I}}{\sqrt{2}} = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}}$$

Leistung wird ständig verbraucht $\rightarrow$ Wirkwiderstand



Wirkleistung und Effektivwerte

Beispiel einphasiges Laden von E-Autos

Ein Elektrofahrzeug wird mit (einphasigem) Wechselstrom bei $U_{\text{eff}} = 230\,\text{V}$ und $I_{\text{eff}} = 16\,\text{A}$ geladen.

Berechnung der Wirkleistung:

$$P = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} = 230\,\text{V} \cdot 16\,\text{A} = 3680\,\text{W} = 3{,}7\,\text{kW}$$

- Ladedauer für 40-kWh-Akku: ca. 11 Stunden
- Falls $I_{\text{eff}} = 32\,\text{A} \rightarrow P \approx 7{,}4\,\text{kW}$

Kondensator

Wiederholung

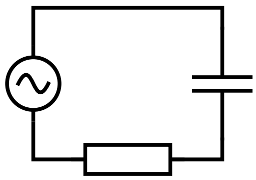
Kapazität C definiert als:

$$C = \frac{Q}{U}$$

Kondensator als Bauteil im Wechselstromkreis

Die Änderung der Ladung Q ist gegeben durch den Strom i:

$$i = \frac{dQ}{dt} = C \cdot \frac{du}{dt}$$



Kapazität

Grundgleichung:

$$i = C \cdot \frac{du}{dt}$$

Spannungs- und Stromverlauf:

$$u = \hat{U} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_u)$$

$$i = \hat{I} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_i)$$

Mit $i = C \cdot \frac{du}{dt}$ folgt:

$$\begin{aligned} \hat{I} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_i) &= C \cdot \frac{d(\hat{U} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_u))}{dt} \\ &= C \cdot \omega \cdot \hat{U} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_u) \\ &= C \cdot \omega \cdot \hat{U} \cdot \sin\left(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2} + \varphi_u\right) \end{aligned}$$

Kapazität - Eigenschaften

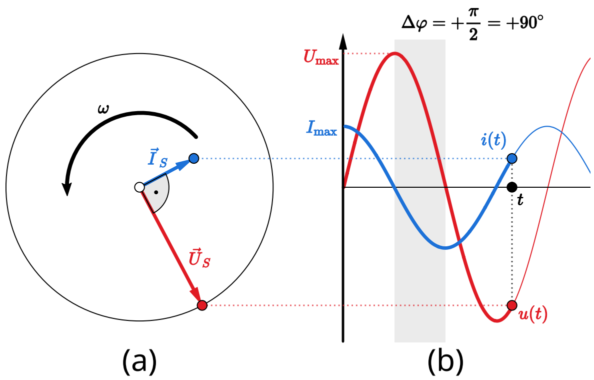
$$u = \hat{U} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_u)$$

$$\begin{aligned} i &= \hat{I} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_i) \\ &= C \cdot \omega \cdot \hat{U} \cdot \sin\left(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2} + \varphi_u\right) \end{aligned}$$

Bedingungen für die Gleichheit:

- Amplituden: $\hat{I} = C \cdot \omega \cdot \hat{U}$ bzw. $\frac{\hat{U}}{\hat{I}} = \frac{1}{\omega \cdot C}$
- Phasen: $\varphi_i = \frac{\pi}{2} + \varphi_u$ bzw. $\varphi_u - \varphi_i = -\frac{\pi}{2}$

$\rightarrow$ Am Kondensator eilt der Strom der Spannung um $\frac{\pi}{2}$ voraus.



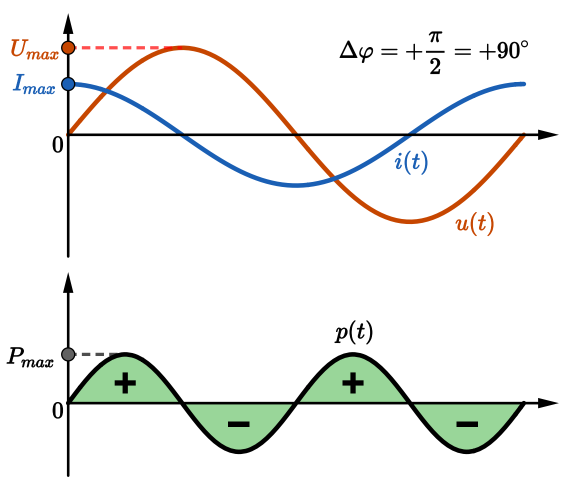
Leistung am Kondensator

Momentanleistung (mit $\varphi_u = 0$ und $\varphi_i = \frac{\pi}{2}$):

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = \hat{U} \cdot \sin(\omega t) \cdot \hat{I} \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \hat{U} \cdot \hat{I} \cdot \sin(\omega t) \cdot \cos(\omega t) = \frac{\hat{U} \cdot \hat{I}}{2} \cdot \sin(2\omega t)$$

$$= U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \cdot \sin(2\omega t)$$



Leistung am Kondensator - Interpretation

Energiefluss:

- Positive Leistung: Aufladen des Kondensators

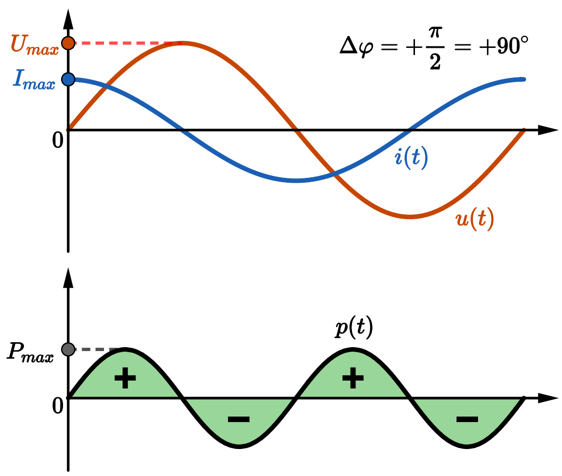
- Negative Leistung: Entladung des Kondensators

Mittlere Leistung:

$$\overline{p} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T p(t)\,dt = 0$$

→ **Blindwiderstand** mit kapazitiver **Blindleistung**:

$$Q_C = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}}$$



Induktivität

Grundgleichung (Selbstinduktion!):

$$u = L \cdot \frac{di}{dt}$$

Spannungs- und Stromverlauf:

$$u = \hat{U} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_u)$$

$$i = \hat{I} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_i)$$

Mit $u = L \cdot \frac{di}{dt}$ folgt:

$$\begin{aligned}\hat{U} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_u) &= L \cdot \omega \cdot \hat{I} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_i) \\ &= L \cdot \omega \cdot \hat{I} \cdot \sin\left(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2} + \varphi_i\right)\end{aligned}$$

Induktivität - Eigenschaften

$$u = \hat{U} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_u)$$

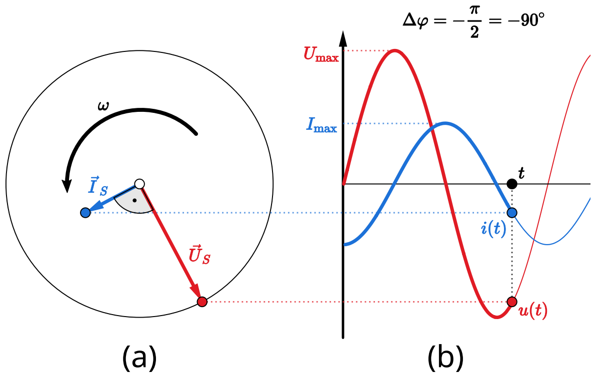
$$i = \hat{I} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_i)$$

$$= L \cdot \omega \cdot \hat{I} \cdot \sin\left(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2} + \varphi_i\right)$$

Bedingungen für Gleichheit:

- Amplituden: $\hat{U} = L \cdot \omega \cdot \hat{I}$ bzw. $\frac{\hat{U}}{\hat{I}} = \omega \cdot L$
- Phasen: $\varphi_u = \frac{\pi}{2} + \varphi_i$ bzw. $\varphi_u - \varphi_i = \frac{\pi}{2}$

$\rightarrow$ **An der Induktivität eilt die Spannung dem Strom um $\frac{\pi}{2}$ voraus.**



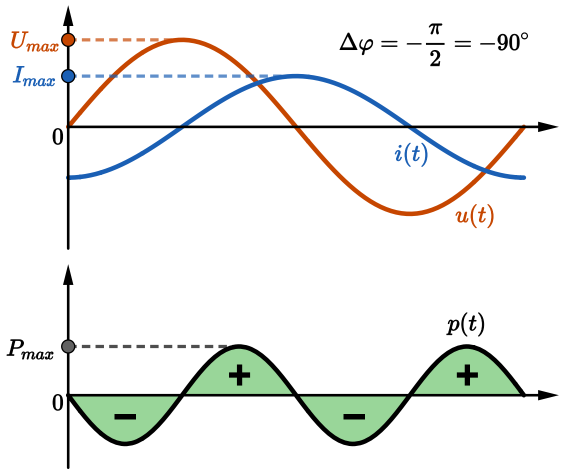
Leistung an der Induktivität

Momentanleistung (mit $\varphi_u = \frac{\pi}{2}$ und $\varphi_i = 0$):

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = \hat{U} \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \hat{I} \cdot \sin(\omega t)$$

$$= \hat{U} \cdot \hat{I} \cdot \cos(\omega t) \cdot \sin(\omega t) = \frac{\hat{U} \cdot \hat{I}}{2} \cdot \sin(2\omega t)$$

$$= U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \cdot \sin(2\omega t)$$



Leistung an der Induktivität – Interpretation

Energiefluss:

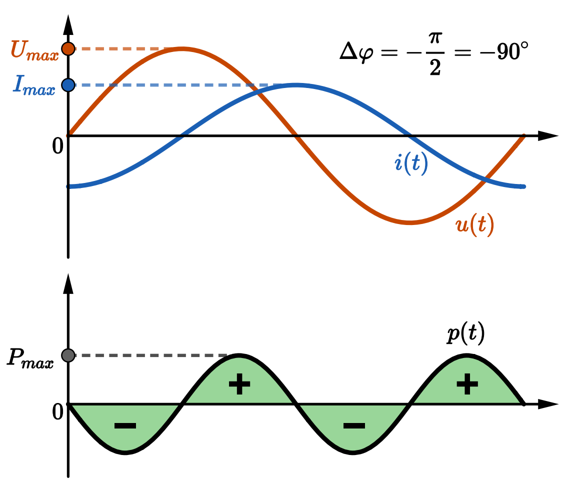
- Positive Leistung: Energie zum Aufbau des magnetischen Feldes
- Negative Leistung: Energie durch Abbau des magnetischen Feldes

Mittlere Leistung:

$$\overline{p} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T p(t)\, dt = 0$$

→ **Blindwiderstand** mit induktiver **Blindleistung:**

$$Q_L = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}}$$



Komplexe Darstellung der Wechselstromwiderstände

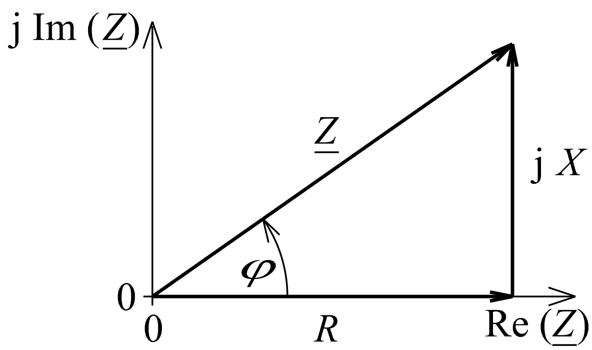
Impedanz & Admittanz

Impedanz (komplexer Widerstand):

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U}{I} \cdot e^{j\cdot(\varphi_u - \varphi_i)}$$

Admittanz (komplexer Leitwert):

$$\underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \frac{I}{U} \cdot e^{-j\cdot(\varphi_u - \varphi_i)} = \frac{1}{\underline{Z}}$$



Impedanz des ohmschen Widerstands

$$\underline{U} = \hat{U} \cdot e^{j\omega t}$$

$$\underline{I} = \hat{I} \cdot e^{j\omega t}$$

$$\underline{Z}_R = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} = R$$

Impedanz der Kapazität

Strom eilt der Spannung um $\frac{\pi}{2}$ voraus:

$$\underline{U} = \hat{U} \cdot e^{j\omega t}$$

$$\underline{I} = \hat{I} \cdot e^{j(\omega t + \frac{\pi}{2})} = \hat{I} \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}$$

$$\hat{I} = \omega \cdot C \cdot \hat{U}$$

$$\underline{Z}_C = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{1}{\omega \cdot C} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j\frac{1}{\omega \cdot C} = jX_C$$

X_C: kapazitiver Blindwiderstand

$$\underline{Y}_C = \omega \cdot C \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} = j\omega \cdot C = jB_C$$

B_C: kapazitiver Blindleitwert

Impedanz der Induktivität

Spannung eilt dem Strom um $\frac{\pi}{2}$ voraus:

$$\underline{U} = \hat{U} \cdot e^{j(\omega t + \frac{\pi}{2})} = \hat{U} \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}$$

$$\underline{I} = \hat{I} \cdot e^{j\omega t}$$

$$\hat{U} = \omega \cdot L \cdot \hat{I}$$

$$\underline{Z}_L = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \omega \cdot L \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} = j\omega \cdot L = jX_L$$

X_L: induktiver Blindwiderstand

$$\underline{Y}_L = \frac{1}{\omega \cdot L} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j\frac{1}{\omega \cdot L} = jB_L$$

B_L: induktiver Blindleitwert

Zusammenfassung: Impedanzen und Admittanzen der Grundelemente

	o. Widerstand R	Kapazität C	Induktivität L
Impedanz Z	R	$\frac{1}{j\omega C} = jX_C$	$j\omega L = jX_L$

	o. Widerstand R	Kapazität C	Induktivität L
Admittanz Y	$\frac{1}{R} = G$	$j\omega C = jB_C$	$\frac{1}{j\omega L} = jB_L$

Grundschaltungen linearer Wechselstromwiderstände

Serienschaltung R und L

Komplexe Maschenregel:

$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L = R \cdot \underline{I} + j\omega L \cdot \underline{I} = \underline{Z} \cdot \underline{I}$$

Impedanz:

$$\underline{Z} = R + j\omega L$$

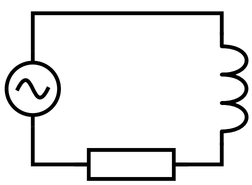
Admittanz:

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{R - j\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

Betrag und Phase:

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$$

$$\varphi = \arctan \frac{\omega L}{R}$$



Parallelschaltung R und L

Komplexe Knotenregel:

$$\underline{I} = \underline{I}_R + \underline{I}_L = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot L}\right) \cdot \underline{U} = \underline{Y} \cdot \underline{U}$$

Admittanz:

$$\underline{Y} = \frac{1}{R} + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot L} = \frac{1}{R} - j \cdot \frac{1}{\omega \cdot L}$$

Impedanz:

$$\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{\omega \cdot L \cdot R \cdot (\omega \cdot L + j \cdot R)}{R^2 + \omega^2 \cdot L^2}$$

Betrag und Phase:

$$Z = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{(\omega \cdot L)^2}}}, \qquad \varphi = \arctan\left(\frac{R}{\omega \cdot L}\right)$$

Serienschaltung R und C

$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_C = R \cdot \underline{I} + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C} \cdot \underline{I} = \underline{Z} \cdot \underline{I}$$

Impedanz:

$$\underline{Z} = R - j\frac{1}{\omega C}$$

Admittanz:

$$\underline{Y} = \frac{\omega C(\omega C R + j)}{1 + \omega^2 C^2 R^2}$$

Betrag und Phase:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}, \qquad \varphi = -\arctan\frac{1}{\omega C R}$$

Parallelschaltung R und C

$$\underline{I} = \underline{I}_R + \underline{I}_C = \left(\frac{1}{R} + j \cdot \omega \cdot C\right) \cdot \underline{U}$$

Admittanz:

$$\underline{Y} = \frac{1}{R} + j \cdot \omega \cdot C$$

Impedanz:

$$\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{R \cdot (1 - j \cdot \omega \cdot C \cdot R)}{1 + \omega^2 \cdot C^2 \cdot R^2}$$

Betrag und Phase:

$$Z = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + (\omega \cdot C)^2}}, \qquad \varphi = -\arctan(\omega \cdot C \cdot R)$$

Übersichtstabelle Grundschaltungen

Schaltung	$\underline{Z}$	$\underline{Y}$	$\|Z\|$	φ
R-L Serie	$\underline{Z} = R + j\omega L$	$\underline{Y} = \frac{R - j\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}$	$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$	$\varphi = \arctan \frac{\omega L}{R}$
R-L Parallel	$\underline{Z} = \frac{\omega L R(\omega L + jR)}{R^2 + \omega^2 L^2}$	$\underline{Y} = \frac{1}{R} - j\frac{1}{\omega L}$	$Z = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{(\omega L)^2}}}$	$\varphi = \arctan \frac{R}{\omega L}$
R-C Serie	$\underline{Z} = R - j\frac{1}{\omega C}$	$\underline{Y} = \frac{\omega C(\omega C R + j)}{1 + \omega^2 C^2 R^2}$	$Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}$	$\varphi = -\arctan \frac{1}{\omega C R}$
R-C Parallel	$\underline{Z} = \frac{R(1 - j\omega C R)}{1 + \omega^2 C^2 R^2}$	$\underline{Y} = \frac{1}{R} + j\omega C$	$Z = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + (\omega C)^2}}$	$\varphi = -\arctan \omega C R$

Leistung bei Wechselstromverbrauchern

Rückblick: Leistung an R, L und C

Wir haben bereits gesehen:

Am Widerstand R:

- $\overline{p} = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}}$ (Wirkleistung)
- Energie wird ständig verbraucht
- Keine Phasenverschiebung: $\varphi = 0°$

Am Kondensator C und an der Induktivität L:

- $\overline{p} = 0$ (Blindleistung)
- Energie pendelt zwischen Quelle und Feld
- Maximale Phasenverschiebung: $\varphi = \pm 90°$

Vom Spezialfall zum Allgemeinfall

Bisher betrachtet:

- Rein ohmsche Verbraucher ($\varphi = 0°$)
- Rein reaktive Verbraucher ($\varphi = \pm 90°$)

In der Praxis:

- Kombinationen aus R, L und C
- **Beliebige Phasenverschiebung** $0° < |\varphi| < 90°$

Beispiele:

- Motor: R-L-Kombination mit $\varphi \approx 30°–60°$
- Netzteil: R-C-Kombination

Der allgemeine Fall

Bisher: Ideale Bauteile (nur R, nur L, nur C)

In der Praxis: Kombinationen mit Phasenverschiebung φ

Spannung und Strom:

- $u(t) = \hat{U} \cdot \cos(\omega t)$
- $i(t) = \hat{I} \cdot \cos(\omega t - \varphi)$

Mit $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$

Frage: Wie berechnet man die Leistung bei *beliebiger* Phasenverschiebung?

Ziel: Vom Spezialfall (R, L, C einzeln) zum Allgemeinfall (beliebige Kombinationen)

Momentanleistung mit Phasenverschiebung

Die **Momentanleistung** bei beliebiger Phasenverschiebung:

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = \hat{U} \cdot \hat{I} \cdot \cos(\omega t) \cdot \cos(\omega t - \varphi)$$

Mit trigonometrischer Umformung ($\cos(a) \cdot \cos(b) = \frac{1}{2}[\cos(a-b) + \cos(a+b)]$):

$$p(t) = \frac{\hat{U} \cdot \hat{I}}{2} \cdot [\cos(\varphi) + \cos(2\omega t - \varphi)]$$

Die Leistung hat einen **konstanten** und einen **oszillierenden** Anteil!

Zerlegung der Momentanleistung

Mit der Umformung $\cos(2\omega t - \varphi) = \cos(2\omega t)\cos(\varphi) + \sin(2\omega t)\sin(\varphi)$:

$$p(t) = \frac{\hat{U} \cdot \hat{I}}{2} \cdot \cos(\varphi) \cdot [1 + \cos(2\omega t)] + \frac{\hat{U} \cdot \hat{I}}{2} \cdot \sin(\varphi) \cdot \sin(2\omega t)$$

Mit Effektivwerten $U = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}}$, $I = \frac{\hat{I}}{\sqrt{2}}$:

$$p(t) = \underbrace{U \cdot I \cdot \cos(\varphi)}_{P} \cdot [1 + \cos(2\omega t)] + \underbrace{U \cdot I \cdot \sin(\varphi)}_{Q} \cdot \sin(2\omega t)$$

Die Leistung oszilliert mit **doppelter Frequenz** 2ω!

Allgemeine Definitionen

Aus der Zerlegung der Momentanleistung folgen die allgemeinen Definitionen:

Wirkleistung:

$$P = U \cdot I \cdot \cos(\varphi)$$

Blindleistung:

$$Q = U \cdot I \cdot \sin(\varphi)$$

Spezialfälle (Wiederholung):

- $\varphi = 0°$ (nur R): $P = U \cdot I$, $Q = 0$
- $\varphi = 90°$ (nur L): $P = 0$, $Q = U \cdot I$
- $\varphi = -90°$ (nur C): $P = 0$, $Q = -U \cdot I$

Wirkleistung P

Die **Wirkleistung** ist der zeitliche Mittelwert der Momentanleistung:

$$P = \langle p(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) \cdot i(t)\, dt$$

Allgemeine Formel:

$$\boxed{P = U \cdot I \cdot \cos\varphi}$$

wobei U und I die **Effektivwerte** sind.

Einheit: Watt [W]

Grenzfälle:

- $\varphi = 0°$ (nur R): $P = U \cdot I$ (maximal)
- $\varphi = \pm 90°$ (nur L oder C): $P = 0$

Wirkleistung: Bedeutung

Was ist Wirkleistung? - Die tatsächlich in Arbeit, Wärme oder Licht umgesetzte Leistung - Nur der **in Phase** mit der Spannung schwingende Stromanteil trägt bei

An ohmschen Widerständen:

$$P = R \cdot I^2$$

Praxisbeispiele:

- Elektromotor: leistet mechanische Arbeit
- Heizung: erzeugt Wärme
- Glühbirne: erzeugt Licht

Blindleistung Q

Die **Blindleistung** beschreibt den oszillierenden Energiefluss:

$$\boxed{Q = U \cdot I \cdot \sin\varphi}$$

Einheit: Voltampere reactive [var]

Physikalische Bedeutung:

Bei induktiven Verbrauchern (Motoren, Transformatoren): - $\varphi > 0$: $Q_L > 0$ (positiv) - Energie wird im **Magnetfeld** gespeichert und wieder abgegeben

Bei kapazitiven Verbrauchern (Kondensatoren): - $\varphi < 0$: $Q_C < 0$ (negativ) - Energie wird im **elektrischen Feld** gespeichert und wieder abgegeben

Blindleistung: Praktische Bedeutung

Problem: Blindleistung trägt **nicht** zur nutzbaren Leistung bei, belastet aber das Netz:

- **Höhere Ströme** in Leitungen und Transformatoren
- **Erhöhte Verluste:** $P_{\text{Verlust}} = R \cdot I^2$
- **Spannungsabfälle** im Netz

Beispiel: Motor ohne Last - Benötigt hauptsächlich Q_L zur Magnetisierung - Hohe Ströme $\rightarrow$ Netzbelastung

Konsequenz: Industriekunden zahlen oft Strafgebühren bei hoher Blindleistung

Scheinleistung S

Die **Scheinleistung** ist das Produkt der Effektivwerte:

$$S = U \cdot I$$

Sie beschreibt die **Gesamtbelastung** des Netzes.

Zusammenhang mit Wirk- und Blindleistung:

$$\boxed{S = \sqrt{P^2 + Q^2}}$$

Einheit: Voltampere [VA]

Warum wichtig? - Generatoren, Transformatoren, Leitungen müssen für S dimensioniert sein - Nicht für P!

Scheinleistung: Praxisbeispiel

Transformator mit $S_{\mathbf{max}} = 10\,\mathbf{kVA}$

Szenario 1: Idealer Verbraucher ($\cos\varphi = 1$) - $P = S = 10\,\mathrm{kW}$ nutzbare Leistung

Szenario 2: Schlechter Leistungsfaktor ($\cos\varphi = 0{,}7$) - $P = S \cdot \cos\varphi = 10 \cdot 0{,}7 = 7\,\mathrm{kW}$ - $Q = S \cdot \sin\varphi \approx 7{,}1\,\mathrm{kvar}$

Verlust: 3 kW Wirkleistung durch Blindleistung!

Der Transformator ist voll ausgelastet ($S = 10\,\mathrm{kVA}$), liefert aber nur 70% nutzbare Leistung.

Komplexe Scheinleistung

Motivation

Frage: Wie kann man Wirk- und Blindleistung *gemeinsam* darstellen?

Idee: Nutze die komplexe Darstellung!

Wir haben:

- Komplexe Spannung: $\underline{U} = U \cdot e^{j\varphi_u}$
- Komplexer Strom: $\underline{I} = I \cdot e^{j\varphi_i}$

Naiver Ansatz: $\underline{U} \cdot \underline{I} = U \cdot I \cdot e^{j(\varphi_u + \varphi_i)}$

Problem: Die Phasen *addieren* sich → **falsch**!

Wir brauchen die *Differenz* $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$

Lösung: Konjugiert komplexer Strom $\underline{I}^*$

Warum $\underline{U} \cdot \underline{I}^*$?

Konjugiert komplexer Strom:

$$\underline{I}^* = I \cdot e^{-j\varphi_i}$$

Produkt:

$$\underline{U} \cdot \underline{I}^* = U \cdot e^{j\varphi_u} \cdot I \cdot e^{-j\varphi_i}$$

$$= U \cdot I \cdot e^{j(\varphi_u - \varphi_i)}$$

$$= U \cdot I \cdot e^{j\varphi}$$

Jetzt stimmt's! Die Phase ist $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$

In kartesischer Form:

$$\underline{U} \cdot \underline{I}^* = U \cdot I \cdot (\cos\varphi + j \sin\varphi)$$

$$= U \cdot I \cdot \cos\varphi + j \cdot U \cdot I \cdot \sin\varphi$$

$$= P + jQ$$

Beispiel: RL-Reihenschaltung

Gegeben: RL-Reihenschaltung

$$\underline{Z} = R + j\omega L$$

Spannung:

$$\underline{U} = \underline{Z} \cdot \underline{I} = (R + j\omega L) \cdot \underline{I}$$

Komplexe Scheinleistung:

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = (R + j\omega L) \cdot \underline{I} \cdot \underline{I}^*$$

Wichtig: $\underline{I} \cdot \underline{I}^* = |\underline{I}|^2 = I^2$ ist **reell**!

$$\underline{S} = I^2 \cdot (R + j\omega L) = \underbrace{R \cdot I^2}_{P} + j \cdot \underbrace{\omega L \cdot I^2}_{Q}$$

Realteil = Wirkleistung am Widerstand R

Imaginärteil = Blindleistung an der Induktivität L

Definition der komplexen Scheinleistung

Die **komplexe Scheinleistung** ist definiert als:

$$\boxed{\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = P + jQ}$$

In Polarform:

$$\underline{S} = S \cdot e^{j\varphi}$$

mit:

- **Betrag:** $S = |\underline{S}| = \sqrt{P^2 + Q^2}$ (Scheinleistung)
- **Phase:** $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$ (Phasenwinkel)

Alternative Darstellungen:

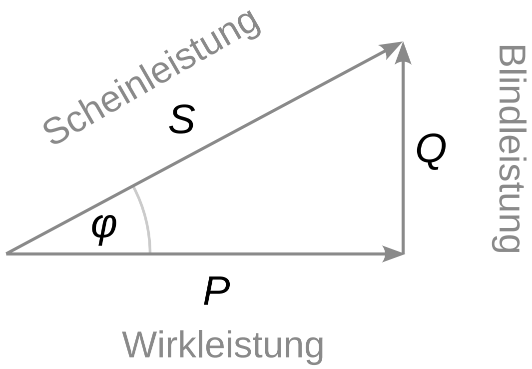
$$\underline{S} = \underline{Z} \cdot I^2 = \frac{U^2}{\underline{Z}^*}$$

Leistungsdreieck und Leistungsfaktor

Leistungsdreieck

Das **Leistungsdreieck** visualisiert den Zusammenhang

- Wirkleistung: $P = S \cdot \cos\varphi$
- Blindleistung: $Q = S \cdot \sin\varphi$
- Scheinleistung: $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$
- Phasenwinkel: $\tan\varphi = \frac{Q}{P}$



Leistungsdreieck: Praxisbeispiel

Industriebetrieb:

- Wirkleistung: $P = 800\,\mathrm{kW}$ (Maschinen)
- Blindleistung: $Q = 600\,\mathrm{kvar}$ (Motoren)

Berechnung der Scheinleistung:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{800^2 + 600^2} = 1000\,\mathrm{kVA}$$

Phasenwinkel:

$$\varphi = \arctan\frac{Q}{P} = \arctan\frac{600}{800} \approx 37°$$

Konsequenz: Der Transformator muss für $S = 1000\,\mathrm{kVA}$ ausgelegt sein, obwohl nur $P = 800\,\mathrm{kW}$ genutzt werden!

Leistungsfaktor cos φ

Der **Leistungsfaktor** gibt an, wie effizient die Scheinleistung genutzt wird:

$$\lambda = \cos\varphi = \frac{P}{S}$$

Wertebereich:

- $\cos\varphi = 1$: Ideal (rein ohmsch)
- $0 < \cos\varphi < 1$: Phasenverschiebung
- $\cos\varphi = 0$: Rein reaktiv

Je höher, desto besser: weniger Strom, weniger Verluste

Leistungsfaktor: Typische Werte

Verschiedene Verbraucher:

Verbraucher	cos	Bemerkung
Glühbirne	1,0	Rein ohmsch
Heizung	1,0	Rein ohmsch
Motor ohne Last	0,3	Viel Magnetisierung
Motor Volllast	0,85	Besser, aber nicht ideal
Transformator	0,8–0,9	Streuinduktivität
Modernes Netzteil (PFC)	$> 0{,}95$	Mit Kompensation

PFC = Power Factor Correction

Kostenaspekt: Warum cos φ wichtig ist

Industriekunden zahlen oft Strafgebühren bei $\cos\varphi < 0{,}9$

Gründe: 1. **Höhere Ströme** → höhere Verluste im Netz ($P_{\text{Verlust}} = R \cdot I^2$) 2. **Größere Anlagen** nötig (Transformatoren, Generatoren) 3. **Spannungsabfälle** im Netz

Beispiel:

- Bei $\cos\varphi = 0{,}7$ muss $I = \frac{P}{U \cdot 0{,}7}$ fließen
- Bei $\cos\varphi = 0{,}95$ nur $I = \frac{P}{U \cdot 0{,}95}$

- **Stromreduktion um 26%!**

Energieversorger fordern: $\cos\varphi > 0{,}9$

Blindleistungskompensation

Blindfaktor sin φ

Der **Blindfaktor** gibt den Anteil der Blindleistung an:

$$\beta = \sin\varphi = \frac{Q}{S}$$

Zusammenhang mit Leistungsfaktor:

$$\lambda^2 + \beta^2 = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$$

Bedeutung:

- Hoher Blindfaktor → viel Blindleistung
- Niedriger Blindfaktor → wenig Blindleistung

Ziel: Blindfaktor minimieren durch Kompensation

Blindleistungskompensation: Das Problem

Problem bei induktiven Verbrauchern (Motoren, Transformatoren): - Hohe Blindleistung $Q_L > 0$ - Niedriger Leistungsfaktor $\cos\varphi$ - Hohe Ströme belasten das Netz - Strafzahlungen drohen

Lösung: Blindleistungskompensation

Idee: Kondensatoren parallel schalten - Kondensatoren: $Q_C < 0$ (kapazitive Blindleistung) - Induktivität: $Q_L > 0$ (induktive Blindleistung) - $Q_{\text{gesamt}} = Q_L + Q_C \approx 0$

Blindleistungskompensation: Berechnung

Gegeben:

- Wirkleistung: P
- Ursprünglicher Leistungsfaktor: $\cos\varphi_1$
- Ziel-Leistungsfaktor: $\cos\varphi_2$

Ursprüngliche Blindleistung:

$$Q_1 = P \cdot \tan\varphi_1$$

Ziel-Blindleistung:

$$Q_2 = P \cdot \tan\varphi_2$$

Benötigte kapazitive Blindleistung:

$$Q_C = Q_1 - Q_2 = P \cdot (\tan\varphi_1 - \tan\varphi_2)$$

Blindleistungskompensation: Praxisbeispiel

Betrieb mit:

- $P = 100\,\mathrm{kW}$ (Wirkleistung)
- $\cos\varphi_1 = 0{,}8 \rightarrow \varphi_1 \approx 37°$

Ursprüngliche Werte:

- $Q_L = P \cdot \tan(37°) = 100 \cdot 0{,}75 = 75\,\mathrm{kvar}$
- $S_1 = \frac{P}{\cos\varphi_1} = \frac{100}{0{,}8} = 125\,\mathrm{kVA}$
- $I_1 = \frac{S_1}{U} = \frac{125000}{400} = 312\,\mathrm{A}$ (bei 400 V)

Ziel: $\cos\varphi_2 = 1$ (vollständige Kompensation)

Benötigte Kondensatoren:

$$Q_C = -75\,\mathrm{kvar}$$

Blindleistungskompensation: Ergebnis

Nach Kompensation ($\cos\varphi = 1$): - $Q_{\text{gesamt}} = Q_L + Q_C = 75 - 75 = 0\,\mathrm{kvar}$ - $S_2 = P = 100\,\mathrm{kVA}$ - $I_2 = \frac{100000}{400} = 250\,\mathrm{A}$

Verbesserungen:

- **Stromreduktion:** von 312 A auf 250 A → **20% weniger**
- **Scheinleistung:** von 125 kVA auf 100 kVA → **20% weniger**
- **Verluste:** $\propto I^2$ → **36% weniger** Leitungsverluste!
- **Keine Strafzahlungen** mehr

Investition in Kondensatoren amortisiert sich schnell!

Zusammenfassung: Wirk-, Blind- und Scheinleistung

Leistungsart	Symbol	Einheit	Bedeutung
Wirkleistung	P	W (Watt)	Tatsächlich umgesetzte/nutzbare Leistung
Blindleistung	Q	var	Pendelnde Leistung (Auf-/Abbau von Feldern)
Scheinleistung	S	VA (Voltampere)	Rechengröße ($U \cdot I$), für Dimensionierung

Zusammenhang:

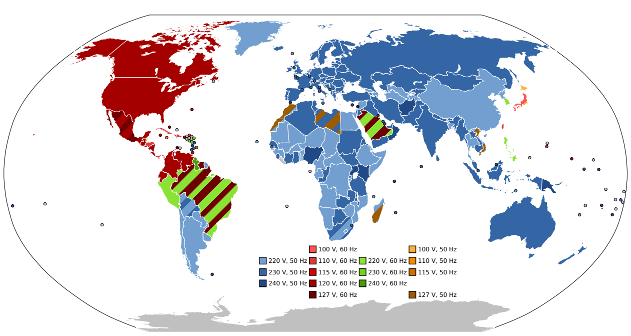
$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

Leistungsfaktor:

$$\cos\varphi = \frac{P}{S}$$

- **Ziel:** $\cos\varphi$ möglichst nahe bei 1 (idealerweise $> 0{,}9$)
- **Maßnahme:** Kompensation mit Kondensatoren

Wechselstrom: Niederspannung weltweit



? Gruppenarbeit: Westinghouse vs. Edison reloaded

Mit Ihrem jetzigen Wissen über Wechselstrom und Gleichstrom, Wirkleistung und Blindleistung, diskutieren Sie in Ihrer Gruppe die Vor- und Nachteile der beiden Stromsysteme.

- Edison : Gleichstrom mit 110 V

- Westinghouse : Wechselstrom mit 110 V, auf längere Strecken transformiert auf > 1000 V

Hinweise:

- Leitungsverluste (inklusive möglicher Blindleistung)
- Sicherheit (Spannungshöhe, Isolation)
- Wirtschaftlichkeit (Infrastruktur, Transformatoren)

Zusatzfrage: würde die Entscheidung heute anders ausfallen?

Drehstrom

- Grundlagen des Drehstromsystems
- Stern- und Dreieckspannung
- Symmetrische Verbraucher
- Leistung im Drehstromsystem

Drehstrom: Motivation

Warum Drehstrom?

- **Effizientere Energieübertragung** über große Entfernungen
- **Höhere Leistung** bei gleicher Leitermasse
- **Einfache Erzeugung rotierender Magnetfelder** für Motoren

Anwendungen von Drehstrom

Energieversorgung:

- Hochspannungsübertragung (110 kV, 380 kV)
- Verteilnetze (10 kV, 20 kV)
- Niederspannungsnetze (400 V)

Antriebstechnik:

- Asynchronmotoren in der Industrie
- Bahnantriebe
- Windkraftanlagen

Elektromobilität:

- Schnellladestationen (bis 350 kW)

Grundlagen des Drehstromsystems

Dreiphasensystem:

Ein Drehstromsystem besteht aus **drei sinusförmigen Wechselspannungen** gleicher Amplitude und Frequenz, die um **120°** phasenverschieben sind.

Zeitfunktionen:

$$u_1(t) = \hat{U} \cdot \sin(\omega t)$$

$$u_2(t) = \hat{U} \cdot \sin(\omega t - 120°)$$

$$u_3(t) = \hat{U} \cdot \sin(\omega t - 240°)$$

Komplexe Darstellung:

$$\underline{U}_1 = U \cdot e^{j \cdot 0°}$$

$$\underline{U}_2 = U \cdot e^{j \cdot (-120°)}$$

$$\underline{U}_3 = U \cdot e^{j \cdot (-240°)}$$

Rotierende Leiterschleife im Magnetfeld

Prinzip der Wechselspannungserzeugung:

Eine rechteckige Leiterschleife (Fläche A) rotiert mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω in einem homogenen Magnetfeld $\vec{B}$.

Magnetischer Fluss durch die Schleife:

$$\Phi(t) = B \cdot A \cdot \cos(\omega t)$$

Induzierte Spannung (Faraday'sches Induktionsgesetz):

$$u(t) = -\frac{d\Phi}{dt} = B \cdot A \cdot \omega \cdot \sin(\omega t) = \hat{U} \cdot \sin(\omega t)$$

Amplitude: $\hat{U} = B \cdot A \cdot \omega$

Vom Wechselstrom zum Drehstrom

Eine Leiterschleife: Sinusförmige Wechselspannung

$$u_1(t) = \hat{U} \cdot \sin(\omega t)$$

Drei Leiterschleifen um 120° versetzt:

Drei identische Wicklungen sind räumlich um jeweils **120°** versetzt auf dem Rotor angeordnet.

$$u_1(t) = \hat{U} \cdot \sin(\omega t)$$

$$u_2(t) = \hat{U} \cdot \sin(\omega t - 120°)$$

$$u_3(t) = \hat{U} \cdot \sin(\omega t - 240°)$$

Ergebnis: Dreiphasiges Drehstromsystem

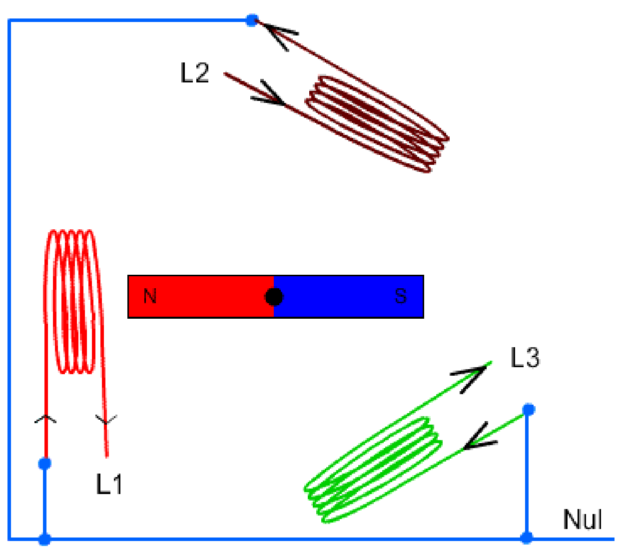
Erzeugung von Drehstrom

Drehstromgenerator:

Ein Drehstromgenerator hat **drei um 120° versetzte Wicklungen**, die sich in einem rotierenden Magnetfeld befinden.

Funktionsprinzip:

- Rotor dreht sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit
- In jeder Wicklung wird eine Spannung induziert
- Die drei Spannungen sind zeitlich um 120° versetzt



Symmetrisches Dreiphasensystem

Aufbau:

- Drei **Außenleiter** (L1, L2, L3) – oft als **Phasen** bezeichnet
- Ein **Neutralleiter** (N) – auf Erdpotential

Bezeichnungen:

- $\underline{U}_1, \underline{U}_2, \underline{U}_3, U_Y$: Sternspannung
- $U_Y = |\underline{U}_1| = |\underline{U}_2| = |\underline{U}_3|$
- $\underline{U}_{12}, \underline{U}_{23}, \underline{U}_{31}, U_\Delta$: Dreieckspannung
- $U_\Delta = |\underline{U}_{12}| = |\underline{U}_{23}| = |\underline{U}_{31}|$
- $\underline{I}_1, \underline{I}_2, \underline{I}_3, I$: Außenleiterstrom
- $\underline{I}_N$: Strom im Neutralleiter

Maschengleichungen

Die Dreieckspannungen (Außenleiterspannungen) ergeben sich aus den Differenzen der Sternspannungen:

$$\underline{U}_{12} = \underline{U}_1 - \underline{U}_2$$

$$\underline{U}_{23} = \underline{U}_2 - \underline{U}_3$$

$$\underline{U}_{31} = \underline{U}_3 - \underline{U}_1$$

Außerdem:

$$\underline{U}_{12} + \underline{U}_{23} + \underline{U}_{31} = 0$$

Zeigerdiagramm

Die Sternspannungen $\underline{U}_1, \underline{U}_2, \underline{U}_3$ sind um 120° versetzt.

Die Dreieckspannungen $\underline{U}_{12}, \underline{U}_{23}, \underline{U}_{31}$ ergeben sich als Differenzen.

Zusammenhang zwischen Stern- und Dreieckspannung:

$$\boxed{U_\Delta = \sqrt{3} \cdot U_Y}$$

(Grafische Herleitung)

Wichtig:

- Dreieckspannungen sind um **30°** gegenüber den Sternspannungen gedreht

- $U_\Delta \approx 1{,}73 \cdot U_Y$

Herleitung der Beziehung

Gegeben: $\underline{U}_1 = U_Y \cdot e^{j0°}$, $\underline{U}_2 = U_Y \cdot e^{-j120°}$

Berechnung:

$$\begin{aligned} \underline{U}_{12} = \underline{U}_1 - \underline{U}_2 &= U_Y \cdot (e^{j0°} - e^{-j120°}) \\ &= U_Y \cdot (1 - (-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2})) \\ &= U_Y \cdot (\frac{3}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}) \end{aligned}$$

Betrag:

$$U_\Delta = |\underline{U}_{12}| = U_Y \cdot \sqrt{(\frac{3}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = U_Y \cdot \sqrt{3}$$

Beispiel: Öffentliches Stromnetz

Niederspannungsnetz in Deutschland:

- **Sternspannung** (Phase gegen Neutralleiter):

$$U_Y = 230\,\mathrm{V}$$

- **Dreieckspannung** (zwischen zwei Außenleitern):

$$U_\Delta = \sqrt{3} \cdot 230\,\mathrm{V} \approx 400\,\mathrm{V}$$

Haushalte:

- Einphasige Verbraucher: 230 V (L1-N, L2-N oder L3-N)
- Drehstromverbraucher: 400 V (L1-L2-L3)

Symmetrische Verbraucher

Definition:

Alle drei Verbraucherstränge sind mit dem gleichen Widerstand $\underline{Z}$ belastet:

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3 = \underline{Z}$$

Konsequenzen:

- Alle Ströme haben den gleichen Betrag
- Phasenverschiebung zwischen den Strömen: 120°
- Neutralleiterstrom ist null: $\underline{I}_N = 0$

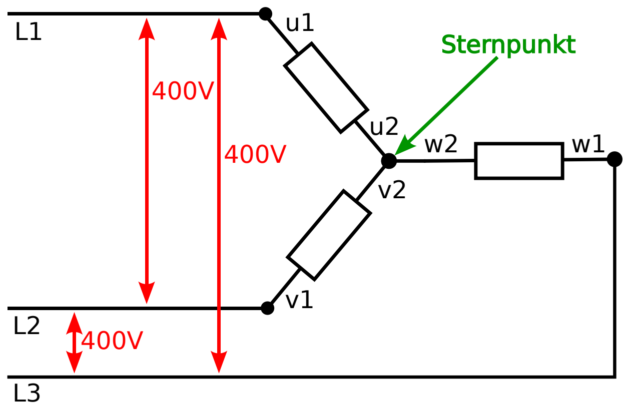
Verbraucher in Sternschaltung

Eigenschaften:

- Strangströme = Außenleiterströme
- Strom durch Neutralleiter = 0 (bei symmetrischer Last)

$$I_{\text{Str}} = I = \frac{U_Y}{Z}$$

$$U_{\text{Str}} = U_Y = \frac{U_\Delta}{\sqrt{3}}$$



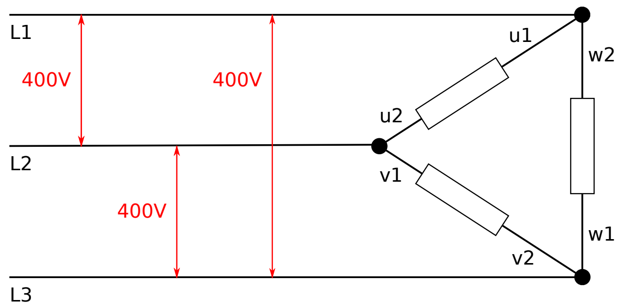
Verbraucher in Dreieckschaltung

Eigenschaften:

- Strangspannungen = Dreieckspannungen
- Zusammenhang zwischen Außenleiter- und Strangströmen:

$$U_{\text{Str}} = U_{\Delta} = \sqrt{3} \cdot U_Y$$

$$I_{\text{Str}} = \frac{U_{\Delta}}{Z}, \quad I = \sqrt{3} \cdot I_{\text{Str}}$$



Vergleich Stern- und Dreieckschaltung

Übersichtstabelle:

Größe	Sternschaltung	Dreieckschaltung
Strangspannung	$U_{\text{Str}} = U_Y = \frac{U_{\Delta}}{\sqrt{3}}$	$U_{\text{Str}} = U_{\Delta} = \sqrt{3} \cdot U_Y$
Strangstrom	$I_{\text{Str}} = \frac{U_Y}{Z}$	$I_{\text{Str}} = \frac{U_{\Delta}}{Z}$
Außenleiterstrom	$I = I_{\text{Str}}$	$I = \sqrt{3} \cdot I_{\text{Str}}$
Neutralleiter	Vorhanden (kann entfallen bei symmetrischer Last)	Nicht vorhanden

Leistung im Drehstromsystem

Leistung pro Strang

Für symmetrische Verbraucher:

Jeder der drei Stränge nimmt die gleiche Leistung auf.

Scheinleistung pro Strang:

$$S_{\text{Str}} = U_{\text{Str}} \cdot I_{\text{Str}}$$

Wirkleistung pro Strang:

$$P_{\text{Str}} = U_{\text{Str}} \cdot I_{\text{Str}} \cdot \cos(\varphi)$$

Blindleistung pro Strang:

$$Q_{\text{Str}} = U_{\text{Str}} \cdot I_{\text{Str}} \cdot \sin(\varphi)$$

wobei φ die Phasenverschiebung zwischen Strang-Spannung und Strang-Strom ist.

Gesamtleistung

Die Gesamtleistung ist die Summe der Leistungen aller drei Stränge:

Scheinleistung:

$$S_{ges} = 3 \cdot S_{\text{Str}} = 3 \cdot U_{\text{Str}} \cdot I_{\text{Str}}$$

Wirkleistung:

$$P_{ges} = 3 \cdot P_{\text{Str}} = 3 \cdot U_{\text{Str}} \cdot I_{\text{Str}} \cdot \cos(\varphi)$$

Blindleistung:

$$Q_{ges} = 3 \cdot Q_{\text{Str}} = 3 \cdot U_{\text{Str}} \cdot I_{\text{Str}} \cdot \sin(\varphi)$$

Gilt für Stern- UND Dreieckschaltung!

Leistung in Sternschaltung

Gegeben:

- Sternspannung: U_Y

- Strangstrom = Außenleiterstrom: $I_{\text{Str}} = I$

Gesamtleistung:

$$S = 3 \cdot U_Y \cdot I$$

Mit $U_Y = \frac{U_\Delta}{\sqrt{3}}$ folgt:

$$S = 3 \cdot \frac{U_\Delta}{\sqrt{3}} \cdot I = \sqrt{3} \cdot U_\Delta \cdot I$$

Leistung in Dreieckschaltung

Gegeben:

- Dreieckspannung: U_Δ
- Strangstrom: $I_{\text{Str}} = \frac{I}{\sqrt{3}}$

Gesamtleistung:

$$S = 3 \cdot U_\Delta \cdot I_{\text{Str}} = 3 \cdot U_\Delta \cdot \frac{I}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \cdot U_\Delta \cdot I$$

Allgemeine Leistungsformel

Für symmetrische Drehstromverbraucher gilt unabhängig von der Schaltungsart:

$$\boxed{S = \sqrt{3} \cdot U_\Delta \cdot I}$$

$$\boxed{P = \sqrt{3} \cdot U_\Delta \cdot I \cdot \cos(\varphi)}$$

$$\boxed{Q = \sqrt{3} \cdot U_\Delta \cdot I \cdot \sin(\varphi)}$$

wobei:

- U_Δ: Dreieckspannung (Außenleiterspannung)
- I: Außenleiterstrom
- φ: Phasenverschiebung zwischen Strang-Spannung und Strang-Strom

Hinweis: Oft wird U_Δ einfach als U geschrieben.

Drehstrom-Blindleistungskompensation

Problem: Drehstrommotoren haben oft einen niedrigen Leistungsfaktor ($\cos\varphi < 0{,}9$).

Lösung: Kompensationskondensatoren in **Stern-** oder **Dreieckschaltung**

Kapazität bei Sternschaltung

Sternschaltung der Kondensatoren:

Am Kondensator liegt die **Sternspannung** U_Y an.

Blindleistung pro Kondensator:

$$Q_{C,\mathrm{Str}} = U_Y^2 \cdot \omega \cdot C_Y$$

Gesamte Blindleistung:

$$Q_C = 3 \cdot U_Y^2 \cdot \omega \cdot C_Y$$

Benötigte Kapazität pro Kondensator:

$$\boxed{C_Y = \frac{Q_C}{3 \cdot U_Y^2 \cdot \omega}}$$

Kapazität bei Dreieckschaltung

Dreieckschaltung der Kondensatoren:

Am Kondensator liegt die **Dreieckspannung** U_Δ an.

Blindleistung pro Kondensator:

$$Q_{C,\mathrm{Str}} = U_\Delta^2 \cdot \omega \cdot C_\Delta$$

Gesamte Blindleistung:

$$Q_C = 3 \cdot U_\Delta^2 \cdot \omega \cdot C_\Delta$$

Benötigte Kapazität pro Kondensator:

$$\boxed{C_\Delta = \frac{Q_C}{3 \cdot U_\Delta^2 \cdot \omega}}$$

Vergleich Stern- und Dreieckschaltung der Kondensatoren

In der Sternschaltung gilt $U_Y = \frac{U_\Delta}{\sqrt{3}}$, also:

$$C_Y = \frac{Q_C}{U_\Delta^2 \cdot \omega}, \qquad C_\Delta = \frac{Q_C}{3 \cdot U_\Delta^2 \cdot \omega}$$

$$\Rightarrow C_Y = 3 \cdot C_\Delta$$

Interpretation:

- Bei **Sternschaltung:** höhere Kapazität erforderlich
- Bei **Dreieckschaltung:** niedrigere Kapazität, aber höhere Spannungsbelastung

Praxis:

- Sternschaltung bei höheren Spannungen (Spannungsbelastung nur U_Y)
- Dreieckschaltung bei niedrigeren Spannungen

Vorteile des Drehstromsystems

Gegenüber einphasigem Wechselstrom:

1. **Effizientere Energieübertragung**
   - Bei gleicher Leistung geringere Leiterverluste
   - Materialeinsparung bei Leitungen
2. **Konstante Leistungsabgabe**
   - Summe der Momentanleistungen ist konstant
   - Gleichmäßigerer Lauf von Motoren
3. **Einfache Erzeugung von Drehfeldern**
   - Drehstrommotoren ohne Anlaufhilfe
   - Robuster Aufbau

Schaltvorgänge an Kapazitäten und Induktivitäten

- Einschaltvorgang und Ausschaltvorgang von Kapazitäten
- Einschaltvorgang und Ausschaltvorgang von Induktivitäten

Einschaltvorgang: Kondensator

Schalterstellung:

$$u = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 0 \\ U_0 & \text{für } t > 0 \end{cases}$$

Für t > 0 gilt (Maschengleichung):

$$U_0 = u_R + u_C = i \cdot R + u_C = C \cdot \frac{du_C}{dt} \cdot R + u_C$$

Gesucht: $u_C(t)$

Aufladevorgang: Lösung

Lösung der Differentialgleichung:

$$u_C(t) = U_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \text{ mit } \tau = R \cdot C \quad (7.1)$$

$$i_C(t) = \frac{U_0}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Anfangs- und Endwerte:

- $u_C(t = 0) = 0$, $u_C(t \to \infty) = U_0$
- $i_C(t = 0) = \frac{U_0}{R}$, $i_C(t \to \infty) = 0$

Zeitkonstante: $\tau = R \cdot C$

Ausschaltvorgang: Kondensator

Schalterstellung:

$$u = \begin{cases} U_0 & \text{für } t \leq 0 \\ 0 & \text{für } t > 0 \end{cases}$$

Für t $>$ 0 gilt (Maschengleichung):

$$0 = u_R + u_C = i \cdot R + u_C = C \cdot \frac{du_C}{dt} \cdot R + u_C$$

Entladevorgang: Lösung

Lösung der Differentialgleichung:

$$u_C(t) = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \text{ mit } \tau = R \cdot C \quad (7.2)$$

$$i_C(t) = -\frac{U_0}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Anfangs- und Endwerte:

- $u_C(t=0) = U_0$, $u_C(t \to \infty) = 0$
- $i_C(t=0) = -\frac{U_0}{R}$, $i_C(t \to \infty) = 0$

Zeitkonstante: $\tau = R \cdot C$

Einschaltvorgang: Induktivität

Schalterstellung:

$$u = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 0 \\ U_0 & \text{für } t > 0 \end{cases}$$

Für t $>$ 0 gilt (Maschengleichung):

$$U_0 = u_R + u_L = i_L \cdot R + L \cdot \frac{di_L}{dt}$$

Gesucht: $i_L(t)$

Aufbau des Magnetfeldes: Lösung

Lösung der Differentialgleichung:

$$i_L(t) = \frac{U_0}{R} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \text{ mit } \tau = \frac{L}{R} \quad (7.3)$$

$$u_L(t) = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Anfangs- und Endwerte:

- $i_L(t=0) = 0$, $i_L(t \to \infty) = \frac{U_0}{R}$
- $u_L(t=0) = U_0$, $u_L(t \to \infty) = 0$

Zeitkonstante: $\tau = \frac{L}{R}$

Ausschaltvorgang: Induktivität

Schalterstellung:

$$u = \begin{cases} U_0 & \text{für } t \leq 0 \\ 0 & \text{für } t > 0 \end{cases}$$

Für t > 0 gilt (Maschengleichung):

$$0 = u_R + u_L = i_L \cdot R + L \cdot \frac{di_L}{dt}$$

Abbau des Magnetfeldes: Lösung

Lösung der Differentialgleichung:

$$i_L(t) = \frac{U_0}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \text{ mit } \tau = \frac{L}{R} \quad (7.4)$$

$$u_L(t) = -U_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Anfangs- und Endwerte:

- $i_L(t=0) = \frac{U_0}{R}$, $i_L(t \to \infty) = 0$
- $u_L(t=0) = -U_0$, $u_L(t \to \infty) = 0$

Zeitkonstante: $\tau = \frac{L}{R}$

Beispiel 1: Kondensator-Entladung

Aufgabe:

Ein Kondensator $C = 0{,}1\,\mu\text{F}$ wird über einen Widerstand $R = 5\,\Omega$ entladen.

In welcher Zeit t_x ist die Spannung am Kondensator auf 10% des ursprünglichen Wertes gesunken?

Beispiel 2: Pufferkondensator

Aufgabe:

Der Datenspeicher eines Taschenrechners (Lastwiderstand $R = 2{,}2\,\mathrm{M\Omega}$) soll während des Batteriewechsels aus einem Kondensator C gespeist werden.

Gegeben:

- Batteriespannung: $U_B = 3\,\mathrm{V}$
- Batteriewechselzeit: $t_W = 30\,\mathrm{s}$
- Minimale Versorgungsspannung: $U_{\min} = 0{,}8\,\mathrm{V}$

Gesucht: Dimensionierung von C

Freilaufdioden

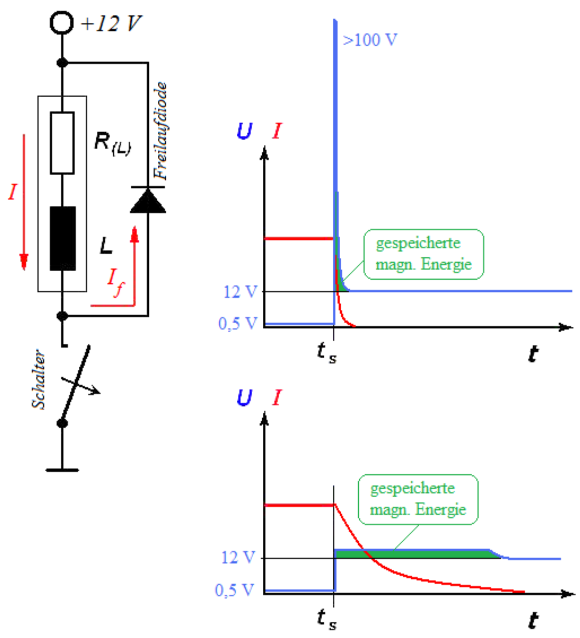
Problem bei Induktivitäten:

Beim Abschalten einer Spule mit Strom I entsteht eine hohe Induktionsspannung $u_{\text{ind}} = -u_L = -L \cdot \frac{di}{dt}$

- Bei schnellem Abschalten können sehr hohe Spannungen entstehen
- Diese können Schaltkreise beschädigen (z.B. Transistoren, Relais)

Lösung: Freilaufdiode

- Parallel zur Induktivität wird eine Diode geschaltet
- Beim Abschalten kann der Strom durch die Diode weiterfließen
- Gespeicherte Energie wird kontrolliert abgebaut


+12 V
$R_{(L)}$
L
I
I_f
Freilaufdiode
Schalter
U I
>100 V
gespeicherte
magn. Energie
12 V
0,5 V
t_s
t
U I
gespeicherte
magn. Energie
12 V
0,5 V
t_s
t